MA2 – příloha " k písemné přednášce 16.3.
" několik dalších příkladů řešení soustav OLDR 1. řádu

1. Příklad na řešení nehomogenní soustavy OLDR 1. řádu

Je dána počáteční úloha:

$$x_1' = -x_1 + 2x_2 + t \quad , \quad x_1(0) = -1$$
$$x_2' = x_1 \qquad - 1 \quad , \quad x_2(0) = 2$$

(i) řešení homogenní soustavy: $x'(t) = A \cdot x(t)$ (1):

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; výpočet vlastních čísel A: $\begin{vmatrix} -1-\lambda, & 2 \\ 1, & -\lambda \end{vmatrix} = 0$, (det$(A-\lambda I) = 0$)

tj. $\lambda(\lambda+1) - 2 = 0 \iff \lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ – kořeny $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$ (tj. vlastní čísla A)

a vlastní vektory: $\vec{v}^{(i)} = (v_{1i}, v_{2i})$, $i = 1,2$:

$\lambda_1 = 1$: $-v_{11} + v_{21} = 0 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a pak řešení (1): $v^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$, $t \in R$

$\lambda_2 = -2$: $v_{12} + 2v_{22} = 0 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

a pak řešení (1): $v^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$, $t \in R$

(Poznámka – vlastních vektorů je nekonečně mnoho – $v^{(1)} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in R \setminus \{0\}$, $v^{(2)} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in R \setminus \{0\}$, můžete si „zvolit" i jiné z nich pro fund. systém řešení)

Máme tedy <u>fundamentální matici řešení</u> $V(t) = \begin{pmatrix} e^{t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{-2t} \end{pmatrix}$

$(t \in R)$

a <u>obecné řešení</u> homogenní soustavy je pak

$$x_H(t) = \begin{pmatrix} e^{t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \quad t \in R;\ c_1, c_2 \in R$$

(ii) <u>a „zkusme" variaci konstant</u> (návod viz přednáška):

Když $x_p(t) = V(t) \cdot \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$, dostáváme pro $\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = C(t)$

rovnici $\underline{C'(t) = V^{-1}(t)\, f(t)}$, kde $f(t) = \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$ v našem příkladu;

a tedy $$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{-2t} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix}$$

Výpočet: $$\begin{pmatrix} e^{t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{-2t} \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{e^{t}}{3} \begin{pmatrix} -e^{-2t}, & -2e^{-2t} \\ -e^{t}, & e^{t} \end{pmatrix} = \frac{e^{t}}{3} \begin{pmatrix} e^{-2t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{t} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} e^{t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{-2t} \end{pmatrix} = -3e^{-t}$$

Tedy:

$$\underline{V^{-1}(t) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} e^{-t}, & 2e^{-t} \\ e^{2t}, & -e^{2t} \end{pmatrix}, \quad t \in R}$$

a dostaneme :

$$c'(t) = \begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{-t}, & 2e^{-t} \\ e^{2t}, & -e^{2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (t-2)e^{-t} \\ (t+1)e^{2t} \end{pmatrix}$$

a odtud (integrace per partes „v každé složce" vektoru) :

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -(t-2)e^{-t} - e^{-t} \\ (t+1)\frac{e^{2t}}{2} - \frac{e^{2t}}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} \\ \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right)e^{2t} \end{pmatrix}$$

a $x_p(t) = V(t) \cdot c(t)$, tedy

$$\underline{x_p(t)} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} e^{t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-t+1)e^{-t} \\ \left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\right)e^{2t} \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}}, t \in R$$

<u>Obecné řešení naší soustavy</u> je tedy

$$(*) \quad \underline{x_{ob}(t) = \begin{pmatrix} e^{t}, & 2e^{-2t} \\ e^{t}, & -e^{-2t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad t \in R, \ c_1, c_2 \in R}$$

<u>a řešení počáteční úlohy</u> $x(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$: „hledáme" $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ v $(*)$:

$x=0$: $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \text{ tj. } \underline{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix} = \cdots}$$

<u>Partikulární řešení v „naší" úloze lze najít i odhadem</u>

(analogicky jako u OLDR 2. řádu)

Odhad: $x_1(t) = At + B$, $\quad x_2(t) = Ct + D \quad \left(k \quad \begin{array}{l} f_1(t) = t \\ f_2(t) = -1 \end{array} \right);$

pak dosazením $x_1(t), x_2(t)$ do soustavy dif. rovnic dostaneme soustavu lineárních rovnic pro hledané koeficienty A, B, C, D:

$$\begin{aligned} A &= -(At+B) + 2(Ct+D) + t && (i) \\ C &= At + B - 1 && (ii) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{llr} z\ (i): & u\ t: & A - 2C = 1 \\ & u\ t^0: & A + B - 2D = 0 \\ z\ (ii) & u\ t: & A = 0 \\ & t^0: & -B + C = -1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{řešení:} \\ A = 0,\ B = \frac{1}{2}, \\ C = -\frac{1}{2},\ D = \frac{1}{4} \end{array}$$

A tedy „nám opět vychází":

$$x_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \ t \in R$$

<u>Poznámka:</u>

1) c_1, c_2 pro řešení počáteční úlohy (v zadání) si čtenář laskavě spočítá sám (cituji našeho skvělého učitele – profesora V. Jarníka)

2) můžete si zkusit danou počáteční úlohu vyřešit i „převedením" soustavy na rovnici 2. řádu – viz zápis přednášky 16.3.

2. A jistě alespoň dva příklady – pro zájemce $(n=2)$
(dobrovolné čtení)

a) charakteristická rovnice matice soustavy má dvojnásobný kořen
(tj. matice má dvojnásobné vlastní číslo)

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1' &= 3x_1 - x_2 \\ (2) \quad x_2' &= 4x_1 - x_2 \end{aligned} \quad , \text{ tj. } \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

A vlastní čísla matice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

$\det(A - \lambda I) = 0$: $\begin{vmatrix} 3-\lambda, & -1 \\ 4, & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda-3)(\lambda+1) + 4 = 0 \iff (\lambda-1)^2 = 0$,

tedy $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

A tedy zde neumíme (my) najít fundamentální systém řešení; zkusme tedy přejít k rovnici OLDR 2. řádu:

z (1) : $x_2 = -x_1' + 3x_1$ a dosazením do (2) máme

$3x_1' - x_1'' = 4x_1 - (3x_1 - x_1')$, tj.

$$x_1'' - 2x_1' + x_1 = 0$$

charakteristická rovnice je (opět) $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, tj. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
a (dle toho, co víme o řešení OLDR 2. řádu) je

$$x_1(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \quad , \ t \in R, \ c_1, c_2 \in R$$

a pak $(x_2 = -x_1' + 3x_1)$ dostaneme

$$x_2(t) = 2c_1 e^t + c_2(2t-1)e^t \quad , \ t \in R, \ c_1, c_2 \in R$$

Zapišme výsledek vektorově (přehledně):

$$\begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}e^{t} + c_2\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)e^{t}$$

a: vektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ je vlastní vektor matice A, příslušný $\lambda=1$:

$$(A-I)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$ a nebo

$$A\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad !$$

a kde se „vzal" vektor $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ u c_2?

(Všimněte si, že vlastní vektor $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ se „u c_2" posunul k „t")

vektor $\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ je řešením soustavy rovnic $(A-I)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$:

tj: $$\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad !$$

(O tom pojednává blíže lineární algebra)

<u>A nakonec příklad</u>

b) <u>Charakteristická rovnice matice soustavy má kořeny komplexní;</u>

vezměme si jednoduchý příklad:

(1) $x_1' = x_2$

(2) $x_2' = -x_1$, tj. $$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; charakteristická rovnice je $\begin{vmatrix} -\lambda, & 1 \\ -1, & -\lambda \end{vmatrix} = 0$,

tj: $\lambda^2 + 1 = 0$ a $\lambda_{1,2} = \pm i$

Zkusme opět „eliminační" metodu (a řešení OLDR 2. řádu):

z (1): $x_2 = x_1'$, dosazení do (2): $x_1'' = -x_1$, tj.

pro $x_1(t)$ máme rovnici: $x_1'' + x_1 = 0$

charakteristická r.: $\lambda^2 + 1 = 0$ (opět) $\Leftrightarrow$ $\lambda_{1,2} = \pm i$

a řešení (umíme): $x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$, $c_1, c_2 \in R$, $t \in R$

a pak tedy $x_2(t) = x_1'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t$, $t \in R$

Opět – vektorově: obecné řešení je

$$(*) \quad \underset{H}{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in R, \; c_1, c_2 \in R$$

a také

$$\underset{H}{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \text{ tedy } V(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix}$$

Řešení počáteční úlohy: $x(t_0) = p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$

$$x_{poč}(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t_0, & -\sin t_0 \\ \sin t_0, & \cos t_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(x_{poč}(t) = V(t) \cdot V^{-1}(t_0) \cdot p \right)$$

Speciálně pro $t_0=0$: $V(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = V^{-1}(0)$,

tedy řešení počáteční úlohy pro $x(0)=p$ je

$$x_{poč}(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad t \in R$$

Ukážme si i vektorové "řešení" soustavy (jako příklad na práci s komplexními čísly a komplexní exponenciálou):

(i) vlastní čísla a vlastní vektory matice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

(opět) $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$, tj. vlastní čísla jsou $\lambda_{1,2} = \pm i$

vlastní vektory:

$\lambda_1 = i$: $-i v_{11} + v_{21} = 0 \Rightarrow v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = -i$: $i v_{12} + v_{22} = 0 \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

a pak fundamentální systém (komplexní)

$$v^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$v^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{-it} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} (\cos t - i \sin t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

a díky linearitě – soustavu řeší i $\operatorname{Re} v^{(1)}(t)$ $(= \operatorname{Re} v^{(2)}(t))$ a i $\operatorname{Im} v^{(1)}(t)$ $(= -\operatorname{Im} v^{(2)}(t))$,

což jsou vektory, které jsme získali i řešením rovnice 2. řádu (*).

<u>Na závěr ještě ukažme řešení nehomogenní soustavy:</u>

(často se nazývá homogenní soustava $x'(t) = Ax(t)$ soustavou autonomní, pak soustava $x'(t) = Ax(t) + f(t)$ je soustava neautonomní)

(1.)

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 + \cos t, & x_1(0) &= 1 \\ x_2' &= -x_1 + 2, & x_2(0) &= 2 \end{aligned}$$

– tedy $f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \end{pmatrix}$

<u>Variace konstant:</u>

hledáme $x(t) = V(t).c(t)$, tedy zde

$$x(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

a pro vektor $\begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$

dostáváme:

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \end{pmatrix},$$

tedy

$$\begin{pmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t, & -\sin t \\ \sin t, & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 t - 2\sin t \\ \sin t \cos t + 2\cos t \end{pmatrix}$$

<u>a integrací</u> (zkuste sami a zkontrolujte výsledek zde)

$$\underline{c_1(t)} = \int (\cos^2 t - 2\sin t)\,dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + 2\cos t + C_1$$

$$\underline{c_2(t)} = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2t + 2\cos t\right)dt = -\frac{1}{4}\cos 2t + 2\sin t + C_2$$

a tedy (stačí najít $x_p(t)$ a „přičíst" k $x_H(t)$ – tj. vzít $C_1 = 0, C_2 = 0$)

$$\underline{x_p(t)} = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t + 2\cos t \\ 2\sin t - \frac{1}{4}\cos 2t \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{4}\sin t + 2 \\ -\frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{4}\cos t \end{pmatrix}},$$

$t \in \mathbb{R}$.

(a řešení počáteční úlohy zkuste sami)

② a akusme jiště odkud partikulárního řešení:

$$\begin{aligned} x_1' &= \quad x_2 + t \\ x_2' &= -x_1 \quad + 2 \end{aligned} \longrightarrow \text{odkud} \quad x_p(t) = \begin{pmatrix} At+B \\ Ct+D \end{pmatrix}$$

a vypočteme (opět dosazením do soustavy):

$$\begin{aligned} A &= (Ct+D) + t \quad &&, \text{tj. } (C+1)t + D - A = 0 \\ C &= -(At+B) + 2 \quad &&, \text{tj. } -At + (-B-C+2) = 0 \end{aligned}$$

a odtud (opět srovnáním koeficientů u polynomů obou stran):

$$\begin{aligned} C + 1 &= 0 \quad &&\Rightarrow \quad C = -1 \\ D - A &= 0 \quad &&\Rightarrow \quad D = 0 \\ -A &= 0 \quad &&\Rightarrow \quad A = 0 \\ 2 - B - C &= 0 \quad &&\Rightarrow \quad B = 3 \end{aligned}$$

tedy $\quad x_p(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$

a $\quad x_{ob}(t) = x_H(t) + x_p(t)$, tj.

$$x_{ob}(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -t \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$